

# Solutions par perturbations singulières pour un problème de Stefan généralisé

M. PRUD'HOMME et T. HUNG NGUYEN

Département de Génie Mécanique École Polytechnique de Montréal, C.P. 6079 A, Montréal, Québec,  
Canada H3C 3A7

(Reçu le 20 juin 1988 et sous forme finale le 27 décembre 1988)

**Résumé**—On étudie ici la solidification vers l'intérieur d'un liquide de propriétés thermodynamiques constantes, à la fois par une méthode de perturbation singulière et par une simulation numérique. On traite ce problème pour trois types de conditions limites dans une géométrie plane, cylindrique ou sphérique. La température initiale du liquide peut être supérieure au point de fusion et on tient compte de l'échange thermique par convection naturelle entre les phases liquide et solide au moyen d'un coefficient qu'on suppose constant tout au long de l'analyse. On applique la méthode des coordonnées déformées pour obtenir des solutions adimensionnelles au second ordre du nombre de Stefan, qui tient lieu ici de paramètre de perturbation. Le domaine de validité des solutions est fonction du nombre de Biot et des conditions limites. Les résultats obtenus concordent avec des calculs numériques pour des nombres de Stefan allant jusqu'à 3,0 dans un cas pour une solidification complète si on applique une transformation de Shank.

## 1. INTRODUCTION

LE PROCESSUS de solidification d'un liquide a fait l'objet de plusieurs études récentes et continue de susciter beaucoup d'intérêt dans la communauté scientifique, en raison de son importance technologique [1–3]. En effet, l'ingénieur est amené dans la pratique à se pencher sur ce phénomène en de nombreuses occasions. Que ce soit en réfrigération ou en métallurgie par exemple, pour ne citer que deux domaines d'application, la solidification joue un rôle important. Cependant l'analyse des problèmes de solidification est ardue dans la plupart des cas. La source des difficultés réside invariablement dans la détermination de la progression du front de solidification. Ce dernier constitue une frontière mobile entre les phases liquide et solide dont la position, voire la forme dans le cas des problèmes à deux ou trois dimensions, n'est pas connue *a priori*.

D'un point de vue mathématique, il s'agit d'un problème non linéaire. Aussi a-t-on souvent eu recours par le passé à des méthodes numériques pour le traiter. La majorité des études en ce sens on fait appel à l'approximation quasi-statique pour résoudre le système d'équations régissant le mouvement de l'interface liquide–solide et l'évolution des profils thermiques. On suppose alors que l'interface demeure immobile durant un court laps de temps tandis qu'on calcule le champ de température dans chaque phase. Un bilan d'énergie thermique sur la durée de l'intervalle sert ensuite à déterminer la nouvelle position de l'interface en vue du prochain calcul des températures, et ainsi de suite. Plusieurs variantes de cette approche ont déjà été employées avec succès selon la géométrie et les conditions limites du problème à traiter.

Bien que les solutions numériques soient adéquates

dans la plupart des cas, il reste difficile de juger de leur précision d'une manière globale. De ce point de vue, les solutions analytiques, même approximatives, sont attrayantes . . . à condition de pouvoir les obtenir, c'est-à-dire essentiellement pour les problèmes à une dimension. En outre, elles offrent l'avantage de révéler de façon explicite la nature de l'influence des paramètres importants, comme le nombre de Stefan, sur le processus de solidification. Le seul problème qui possède une solution complète est celui d'un liquide au point de fusion qui se solidifie dans un milieu plan semi-infini pour les conditions de Dirichlet à l'origine. Le système d'équations est alors séparable et on trouve une solution de similarité pour la température [4].

Dans tous les autres cas, les solutions analytiques s'obtiennent par les méthodes de perturbation régulières ou singulières et leur domaine de validité est limité à une certaine gamme de valeurs du nombre de Stefan, qui joue le rôle de paramètre de perturbation. Des deux types de méthodes mentionnées ci-dessus, le premier est le plus simple et le plus direct. Prud'homme et Nguyen [5] ont pu établir de cette façon la forme générale des termes de la série de perturbation dans le cas plan pour différentes conditions limites. Mentionnons également les travaux de Pedroso et Demoto [6, 7] dans le cas sphérique et ceux de Riley [8] dans le cas cylindrique. Dans ces deux derniers cas cependant, les solutions pour la solidification vers l'intérieur divergent lorsque le front approche du centre.

Il faut alors avoir recours au second type de méthodes pour obtenir des solutions uniformément valides comme l'ont fait Pedroso et Demoto [9] dans le cas sphérique, ainsi que Riley *et al.* [10] et Beckett [11] dans les cas cylindrique et sphérique. Le formalisme de ce type de méthode est malheureusement

## NOMENCLATURE

$Bi$	nombre de Biot, $hR_w/k$	$\Gamma$	paramètre, $h^*R_w(U_\infty^* - 1)/k$
$c$	chaleur spécifique	$\delta$	épaisseur initiale
$h$	coefficient de transfert de chaleur	$\Delta$	accroissement
$k$	conductivité thermique	$\varepsilon$	nombre de Stefan, $c\Delta T/L$
$L$	chaleur latente de fusion	$\kappa$	diffusivité thermique, $k/(\rho c)$
$n$	exposant	$\rho$	masse volumique
$N$	nombre de noeuds du maillage	$\sigma_i$	coefficient de $\varepsilon'$
$\dot{Q}''$	flux de chaleur	$\tau$	temps adimensionnel, $tk\Delta T/\rho LR_w^2$
$r$	position adimensionnelle, $R/R_w$	$\phi, \psi$	coordonnées déformées.
$R$	position dans la phase solide		
$S$	épaisseur de la couche solide, $1 - r_f$		
$T$	température		
$t$	temps		
$U$	température adimensionnelle, $(T - T_0)/\Delta T$		
$V$	volume de contrôle		
$X$	nouvelle coordonnée, $(1 - r)/S$ .		
Symboles grecs		Indices et exposants	
$\alpha$	paramètre	$i \pm 1/2$	valeur à $X_i \pm \Delta X/2$
		$f$	valeur à l'interface
		$w$	valeur à la paroi
		$0$	valeur de référence
		$\infty$	valeur à l'infini
		$*$	valeur dans la phase liquide.

beaucoup plus lourd, bien qu'il demeure possible, en principe, d'établir la solution à tous les ordres du nombre de Stefan. Par conséquent, on se contente presque toujours d'un calcul au second ordre étant donné que l'effort requis pour calculer le terme d'ordre trois ne vaut pas en général le faible gain de précision qui en résulte. Il reste encore à explorer l'approche nouvelle, et très prometteuse, mise de l'avant par Van Dyke [12], qui consiste à calculer et analyser sur ordinateur les coefficients des séries pour en extraire les singularités.

Dans le cadre de cette étude, on vise à traiter de façon unifiée le problème de solidification en configuration plane, cylindrique et sphérique, pour les trois conditions limites de base, soit une température constante, un flux de chaleur constant et un coefficient de transfert de chaleur constant. On se propose donc d'établir la solution au second ordre pour les trois géométries et les trois conditions limites, là où les études précédentes ne traitaient qu'une géométrie pour une seule condition limite. On emploiera pour ce faire la méthode des coordonnées étirées décrite par Van Dyke [13], qu'ont adoptée Prud'homme *et al.* [14] pour développer les formules de récurrence qui permettent de construire la série de perturbation à tous les ordres pour le problème considéré ici, lorsque le liquide est initialement au point de fusion. On considérera aussi le cas où la température initiale est supérieure au point de fusion, en tenant compte des effets thermoconvectifs dans le liquide à l'aide d'un coefficient approprié. Les solutions analytiques seront ensuite comparées aux résultats de simulations numériques basées sur une immobilisation de la frontière mobile afin d'estimer leur domaine de validité.

## 2. FORMULATION DU PROBLÈME

Posons maintenant le problème à l'étude en termes analytiques. Soit un liquide de propriétés thermodynamiques constantes qui se solidifie uniformément vers l'intérieur tel qu'indiqué à la Fig. 1. On adopte ici les symboles  $\kappa$ ,  $\rho$ ,  $L$ ,  $k$ ,  $c$  pour désigner la diffusivité thermique, la densité, la chaleur latente, la conductivité thermique et la chaleur spécifique. Le champ de température dans la phase solide satisfait l'équation de conduction de la chaleur à une dimension qui prend alors la forme

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{R^n} \frac{\partial}{\partial r} \left( R^n \frac{\partial T}{\partial R} \right) \quad (1)$$

où  $n = 0, 1, 2$  selon qu'il s'agit respectivement de solidification plane, cylindrique ou sphérique. Lorsque la température initiale  $T_\infty^*$  du liquide est

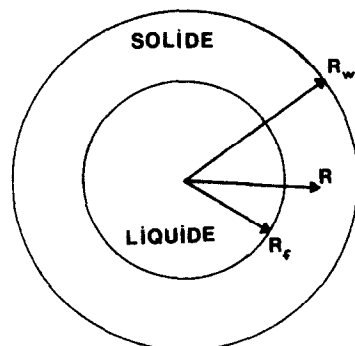


FIG. 1. Géométrie et système de coordonnées.

supérieure au point de fusion, l'écoulement induit dans le liquide sous l'influence de la convection naturelle affecte l'échange thermique à l'interface liquide-solide. On tient compte de cet effet de façon globale par le biais d'un coefficient de transfert de chaleur  $h^*$  que l'on suppose constant sur toute la surface du front de solidification. Compte tenu donc de la convection dans la phase liquide, un bilan d'énergie à l'interface donne

$$\rho L \frac{dR_f}{dt} = k \frac{\partial T}{\partial R} \Big|_{R=R_f} - h^*(T_f - T_\infty) \quad (2)$$

où  $T_f$  est la température de fusion. De plus

$$T = T_f; \quad R = R_f. \quad (3)$$

On spécifie des conditions limites à  $R = R_w$  qui correspondent à une solidification vers l'intérieur. On envisage trois possibilités, soit (a) une température constante  $T = T_w$ , (b) un flux de chaleur constant  $\dot{Q}''$  et (c) un coefficient de transfert de chaleur  $h$  constant. Donc

$$\begin{aligned} (a) \quad & T = T_w; \quad R = R_w \\ (b) \quad & -k \frac{\partial T}{\partial R} = \dot{Q}''; \quad R = R_w \\ (c) \quad & -k \frac{\partial T}{\partial R} = h(T - T_\infty); \quad R = R_w. \end{aligned} \quad (4a-c)$$

(N.B. Il suffirait de changer les signes du membre de gauche de (4b) et (4c) et du second membre de droite de (2) pour reformuler le problème vers l'extérieur.)

Il est préférable de traiter le problème sous forme adimensionnelle en définissant de nouvelles variables à cet effet. Soit

$$\begin{aligned} U &= (T - T_0)/\Delta T, \quad \tau = tk\Delta T/(\rho LR_w^2) \\ r &= R/R_w, \quad r_f = R_f/R_w \end{aligned} \quad (5)$$

où

$$\begin{aligned} (a) \quad & \Delta T = T_f - T_w, \quad T_0 = T_w \\ (b) \quad & \Delta T = \dot{Q}'' R_w / k, \quad T_0 = T_f - \Delta T \\ (c) \quad & \Delta T = T_f - T_\infty, \quad T_0 = T_\infty. \end{aligned} \quad (6a-c)$$

Une fois le changement de variables effectué on élimine  $\tau$  de (1) à l'aide de (2) pour obtenir le nouveau système

$$\varepsilon \frac{\partial U}{\partial r_f} \left\{ \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=r_f} + \Gamma \right\} = \frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^n \frac{\partial U}{\partial r} \right); \quad n = 0, 1, 2 \quad (7)$$

$$\frac{dr_f}{d\tau} = \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=r_f} + \Gamma \quad (8)$$

où  $\varepsilon = c\Delta T/L$  est le nombre de Stefan et  $\Gamma$  un nombre qui vaut  $h^* R_w (U_\infty^* - 1)/k$ . Les conditions limites sous forme adimensionnelle, quant à elles, sont données par

$$U = 1; \quad r = r_f \quad (9)$$

et

$$\begin{aligned} (a) \quad & U = 0; \quad r = 1 \\ (b) \quad & \frac{\partial U}{\partial r} = -1; \quad r = 1 \\ (c) \quad & \frac{\partial U}{\partial r} = -Bi U; \quad r = 1 \end{aligned} \quad (10a-c)$$

où  $Bi = hR_w/k$  est le nombre de Biot. Le problème est désormais posé de manière formelle comme un système d'équations à résoudre pour le champ de température dans la phase solide et la position de la frontière mobile. Disons tout de suite que la physique du problème impose une limite aux valeurs que peut prendre  $\Gamma$ , au-delà de laquelle la solidification s'arrête. Les termes du membre de droite de (8) étant de signes différents il ne peut en être autrement. Il n'est pas difficile de démontrer à partir des résultats en appendice que, pour les conditions limites (4b) et (4c), la solidification ne peut commencer pour l'une ou l'autre des trois géométries que si  $\Gamma$  est inférieur à 1 et à  $Bi$ , respectivement. D'autre part l'hypothèse d'unidimensionnalité et d'un coefficient  $h^*$  constant n'est réaliste que pour un faible niveau de convection dans le liquide. Par conséquent, tout porte à croire que le modèle de solidification à l'étude ici n'est valable que pour de petites valeurs de  $\Gamma$ , sans doute bien inférieures à un.

### 3. ANALYSE

Comme on l'a mentionné plus haut, le système (7), (8) n'admet de solution fermée que dans le cas  $n = \Gamma = 0$  pour une température constante imposée à  $r = 0$ . On trouve alors une solution de similitude de type fonction d'erreur pour  $U$ , qui demeure valide pour un nombre de Stefan arbitraire [4]. Dans tous les autres cas on peut obtenir des solutions sous forme de séries par les méthodes de perturbation. Ces solutions ont un domaine de validité restreint et deviennent de moins en moins précises à mesure que  $\varepsilon$  augmente. Néanmoins elles sont utiles pour mettre en évidence l'influence initiale du paramètre  $\varepsilon$  sur le processus de solidification, ou encore celle de la géométrie, des conditions limites et d'autres paramètres tels que  $Bi$  et  $\Gamma$ . Les méthodes de perturbation régulières présupposent un développement en série de la forme

$$U(r, r_f; \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i U_i(r, r_f) \quad (11)$$

pour le champ de température dans la phase solide. Elles sont relativement simples à appliquer et donnent des solutions uniformément valides pour la solidification vers l'extérieur. Mais celles-ci divergent pour la solidification vers l'intérieur lorsque  $r_f \rightarrow 0$ .

On doit avoir recours aux méthodes de perturbation singulières pour établir des solutions pour la solidification vers l'intérieur qui soient valides au voisinage du centre pour les trois géométries considérées ici. On adopte la méthode des coordonnées étirées

qui est l'une des plus efficaces [13]. L'approche est la suivante. On définit d'abord formellement les variables étirées  $\phi$  et  $\psi$  qui doivent se réduire à  $r$  et  $r_f$  à la limite lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , soit

$$\begin{aligned}\phi &= f(r, r_f) \\ \psi &= f(r_f, r_f)\end{aligned}\quad (12)$$

de sorte que  $\phi = \psi$  quand  $r = r_f$ . Au lieu d'effectuer un développement de la fonction  $U$  elle-même en puissances d' $\varepsilon$ , on développe plutôt  $r$  et  $r_f$  comme ceci

$$\begin{aligned}r &= \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \sigma_i(\psi, \phi) \\ r_f &= \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \sigma_i(\psi, \psi).\end{aligned}\quad (13)$$

On cherche ensuite à obtenir une solution  $U(\psi, \phi)$  qui satisfasse les équations et conditions limites en  $\phi$  et  $\psi$  à l'ordre zéro. Les  $\sigma_i$  sont calculés par après. On n'a placé jusqu'à présent aucune restriction sur la nature de l'étirement. On peut supposer, sans perte de généralité, qu'il s'annule à  $r = 1$ . Ceci simplifie beaucoup l'analyse. On a donc au départ pour tout  $r$ ,  $\phi = \partial\phi/\partial r = 1$  à  $r = 1$ . Avec cette condition le système (7), (8) et les conditions limites (9), (10) deviennent respectivement

$$\begin{aligned}\varepsilon \left[ \frac{\partial U}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \Gamma \right]_{\phi=\psi} &= \left\{ \frac{\partial U}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial r_f} + \frac{\partial U}{\partial \psi} \frac{d\psi}{dr_f} \right\} \\ &= \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 + \frac{\partial U}{\partial \phi} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{n}{r} \frac{\partial U}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial r}\end{aligned}\quad (14)$$

$$\frac{dr_f}{d\psi} \frac{d\psi}{d\tau} = \left[ \frac{\partial u}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right]_{\phi=\psi} + \Gamma \quad (15)$$

et

$$U = 1; \quad \phi = \psi \quad (16)$$

$$(a) \quad U = 0; \quad \phi = 1$$

$$(b) \quad \frac{\partial U}{\partial \phi} = -1; \quad \phi = 1$$

$$(c) \quad \frac{\partial U}{\partial \phi} = -Bi U; \quad \phi = 1. \quad (17a-c)$$

La condition d'étirement nul à la paroi veut que pour tout  $\psi$  on ait

$$\sigma_i(\psi, 1) = \frac{\partial \sigma_i}{\partial \phi}(\psi, 1) = 0; \quad i \geq 1. \quad (18)$$

On élimine ensuite  $r$  et  $r_f$  de (14) à l'aide de (13), ce qui donne une relation entre  $U$ ,  $\sigma_i$ ,  $\phi$ ,  $\psi$  sous la forme d'une série de puissances en  $\varepsilon$ . Celle-ci permet d'établir une équation pour  $U$  ainsi qu'une formule de récurrence pour les  $\sigma_i$ , en identifiant d'un membre à l'autre de l'égalité les coefficients des puissances d' $\varepsilon$ . A l'ordre zéro donc, on tire

$$\phi \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} + n \frac{\partial U}{\partial \phi} = 0 \quad (19)$$

qu'on intègre aisément après multiplication par  $\phi^{n-1}$ . La solution pour  $U(\psi, \phi)$  fait intervenir deux fonctions arbitraires de  $\psi$ , notées  $a$  et  $b$ , qu'on détermine à partir des conditions (16) et (17)

$$\begin{aligned}U(\psi, \phi) &= a + b\phi; \quad n = 0 \\ &= a + b \ln \phi; \quad n = 1 \\ &= a + b/\phi; \quad n = 2.\end{aligned}\quad (20)$$

Une fois que  $U(\psi, \phi)$  est connue, on évalue les fonctions  $\sigma_i$  de façon explicite pour  $i \geq 1$  au moyen de la formule de récurrence

$$\frac{\partial}{\partial \phi} \left\{ -\phi^{2-n} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \phi^{n-1} \frac{\partial U}{\partial \phi} \sigma_i \right) \right\} = f_i(\psi, \phi) \quad (21)$$

où  $f_i(\psi, \phi)$  désigne une sommation multiple qui fait intervenir  $\Gamma$ ,  $\sigma_{i-1}$ ,  $\sigma_{i-2}$ , ...,  $\sigma_0$ . Cette sommation est donnée au long dans [14] pour le cas  $\Gamma = 0$ . La condition d'étirement nul à la paroi fournit deux conditions pour l'intégration de (21). On peut donc en principe déterminer  $\sigma_i$  à tous les ordres avec la formule intégrale

$$\sigma_i(\psi, \phi) = \left( \frac{\partial U}{\partial \phi} \phi^{n-1} \right)^{-1} \int_1^\phi \int_1^\zeta -\zeta^{n-2} f_i(\psi, \xi) d\xi d\zeta \quad (22)$$

et ce, pour tous les cas considérés ici. Fait à noter,  $f_i(\psi, \phi)$  peut s'écrire sous une forme où  $n$  n'apparaît pas explicitement. L'effet des conditions limites et de la géométrie sur l'étirement se manifeste indirectement à travers la fonction  $U$ . La lourdeur des calculs s'accroît cependant très rapidement avec  $i$  et l'expérience révèle que le surcroît d'effort requis n'apporte aucun gain appréciable de précision pour de faibles valeurs d' $\varepsilon$ . En outre, le domaine de validité du développement demeure le même à toutes fins pratiques. On s'en tiendra alors à l'ordre deux dans les calculs pour le reste de cette étude.

Aux deux premiers ordres, la sommation  $f_i(\psi, \phi)$  vaut respectivement

$$f_1(\psi, \phi) = \phi \frac{\partial U}{\partial \psi} \left[ \frac{\partial U}{\partial \phi} \right]_{\phi=\psi} + \phi \Gamma \frac{\partial U}{\partial \psi}$$

et

$$\begin{aligned}f_2(\psi, \phi) &= \Gamma \phi \frac{\partial U}{\partial \psi} \left[ \frac{\partial \sigma_1}{\partial \phi} \right]_{\phi=\psi} + \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial \phi^2} \\ &\times \left( \sigma_1 + \phi \left[ \frac{\partial \sigma_1}{\partial \phi} \right]_{\phi=\psi} \right) \frac{\partial U}{\partial \phi} + \left( \frac{\partial \sigma_1}{\partial \phi} + \left[ \frac{\partial \sigma_1}{\partial \phi} \right]_{\phi=\psi} \right) \\ &\times \left( \phi \frac{\partial \sigma_1}{\partial \phi} - \sigma_1 \right) \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} + \left\{ 1 + \frac{\Gamma}{[\partial U / \partial \phi]_{\phi=\psi}} \right\} \\ &\times \left\{ \left( 3\phi \frac{\partial \sigma_1}{\partial \phi} + \sigma_1 - \phi \sigma'_1 \right) \frac{\partial U}{\partial \phi} \right. \\ &\quad \left. - \phi \frac{\partial \sigma_1}{\partial \psi} \frac{\partial U}{\partial \phi} \right\} \left[ \frac{\partial U}{\partial \phi} \right]_{\phi=\psi}\end{aligned}\quad (23)$$

où le symbole prime représente la dérivée totale de la fonction évaluée à  $\phi = \psi$ .

On obtient une autre série de puissances pour  $d\tau/d\psi$  en éliminant  $r$  et  $r_f$  de (15) à l'aide de (14)

$$\frac{d\tau}{d\psi} = \left[ \frac{\partial U}{\partial \phi} \right]_{\phi=\psi}^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \sum_{j=0}^i \left[ \frac{\partial \sigma_j}{\partial \phi} \right]_{\phi=\psi} \sigma'_{i-j}. \quad (24)$$

On peut poser sans perte de généralité la condition initiale  $\tau = 0$  à  $\psi = 1$ . Ceci permet d'intégrer (24) pour obtenir une relation explicite entre  $\tau$  et  $\psi$  dans chaque cas. Mais il est beaucoup plus simple d'intégrer plutôt l'équation (8) numériquement, une fois qu'ont été établies les relations  $r_f(\psi)$  et  $r(\psi, \phi)$  à l'ordre  $\varepsilon^2$ . Les solutions  $\sigma_1, \sigma_2$  pour un  $\Gamma$  non nul peuvent s'exprimer en termes des solutions pour  $\Gamma = 0$ , notées respectivement  $\sigma_1^0$  et  $\sigma_2^0$ . On adopte ici la notation avec des virgules pour les dérivées partielles afin de présenter les résultats de façon plus concise. Suivant cette notation, on démontre que

$$\sigma_1(\psi, \phi) = (1 + \Gamma/[U, \phi])\sigma_1^0 \quad (25)$$

où chaque quantité entre crochets est évaluée à  $\phi = \psi$ , et que

$$\begin{aligned} \sigma_2(\psi, \phi) = & (1 + \Gamma/[U, \phi])^2 \sigma_2^0 \\ & + \frac{\Gamma}{[U, \phi]} \left\{ [\sigma_1^0] + \frac{[\sigma_1^0][U, \phi]'}{[U, \psi]} \right\} \sigma_1 \\ & + \frac{\Gamma}{[U, \phi]} \left\{ 1 + \frac{\Gamma}{[U, \phi]} \right\} [U, \phi]' F_2(\psi, \phi) \end{aligned} \quad (26)$$

où  $F_2$  vaut

$$F_2(\psi, \phi) = -\frac{1}{U, \phi \phi^{n-1}} \int_1^\phi \int_1^\tau \xi \tau^{n-2} \sigma_1^0(\psi, \xi) U, \phi(\psi, \xi) d\xi d\tau.$$

On se référera à l'appendice pour la forme explicite de  $U, \sigma_1, \sigma_2$  dans chaque cas. Mentionnons au passage que tous les résultats qu'on obtient pour la condition (10a) se déduisent de ceux qu'on obtient pour la condition (10c) en faisant tendre  $Bi$  vers l'infini dans les formules. Par conséquent, on ne donne en appendice que les résultats correspondant aux conditions (10b) et (10c) seulement.

#### 4. SOLUTIONS NUMÉRIQUES

Il est possible d'obtenir des solutions entièrement numériques pour ce problème, à partir des équations de départ (1) et (2) préalablement adimensionnalisées. On préfère cependant résoudre les équations transformées sujettes aux conditions (9), (10) dans un système de coordonnées  $X, \tau$  où le front de solidification demeure fixe. Il suffit pour cela de définir une nouvelle coordonnée  $X$  au moyen de la transformation

$$X = \frac{(1-r)}{S} \quad (27)$$

où  $S = 1 - r_f$  représente l'épaisseur de la couche solide. De cette façon l'interface liquide-solide se trouve immobilisée à  $X = 1$  et le domaine de solution des équations fondamentales correspond toujours à l'intervalle  $0 \leq X \leq 1$ . Le système retransformé s'écrit alors

$$\varepsilon \left( \frac{\partial U}{\partial \tau} - \frac{X}{S} \frac{dS}{d\tau} \frac{\partial U}{\partial X} \right) = \frac{1}{S^2(1-SX)^n} \frac{\partial}{\partial X} \left\{ (1-SX)^n \frac{\partial U}{\partial X} \right\} \quad (28)$$

$$\frac{dS}{d\tau} = \frac{1}{S} \frac{\partial U}{\partial X} \Big|_{X=1} - \Gamma. \quad (29)$$

Les conditions limites (3), (4) deviennent quant à elles

$$U = 1; \quad X = 1 \quad (30)$$

et

$$(a) \quad U = 0; \quad X = 0$$

$$(b) \quad \frac{\partial U}{\partial X} = S; \quad X = 0$$

$$(c) \quad \frac{\partial U}{\partial X} = S Bi U; \quad X = 1. \quad (31a-c)$$

Ces équations sont ensuite discrétisées selon le schéma classique des différences centrales. On adopte une formulation implicite pour (28) et une formulation explicite pour (29). La méthode de solution numérique peut se résumer ainsi. Soit  $U_i$  la valeur de  $U$  au temps  $\tau$  et au noeud  $X_i = (i-1)\Delta X$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ). Sur toute la durée de l'intervalle de temps  $\tau_0 \leq \tau \leq \tau_0 + \Delta\tau$ , on pose

$$\frac{\partial U_i}{\partial \tau} = \frac{U_i - U_i^0}{\Delta\tau} \quad (32)$$

où  $U_i^0$  représente la valeur à  $\tau_0$ . Durant cet intervalle, toutes les dérivées spatiales de  $U$  sont évaluées à  $\tau_0 + \Delta\tau$ . A ce point-ci, il est intéressant de remarquer que (32) peut être interprétée comme une formule de différences centrales au temps  $\tau = \tau_0 + \Delta\tau/2$ . Aussi adopterons-nous les recommandations de Sparrow et Chuck [1] voulant que le terme  $dS/d\tau$  de (28) soit évalué à  $\tau = \tau_0 + \Delta\tau/2$  lui aussi pour être consistant avec le schéma des différences centrales. La présence des termes en  $1/r^n$  dans l'équation de conduction peut causer des problèmes qu'il est facile d'éviter en employant la méthode des volumes de contrôle. On obtient donc, après intégration, l'équation de conduction sous forme discrétisée

$$\begin{aligned} \varepsilon V \left\{ \frac{U_i^0 - U_i}{\Delta\tau} S + X_i \left( \frac{dS}{d\tau} \right)^{1/2} \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2\Delta X} \right\} \\ = (n+1)r_{i+1/2}^n \frac{U_{i+1} - U_i}{\Delta X} \\ + (n+1)r_{i-1/2}^n \frac{U_{i-1} - U_i}{\Delta X} \end{aligned} \quad (33a)$$

$$V = r_{i+1/2}^{n+1} - r_{i-1/2}^{n+1} \quad (33b)$$

où  $(dS/d\tau)^{1/2}$  représente la valeur de la quantité entre parenthèses au temps  $\tau_0 + \Delta\tau/2$ . Cette valeur se calcule par étapes à partir de (29). On pose d'abord

$$\left(\frac{dS}{d\tau}\right)^0 = \frac{1}{S^0} \frac{1 - U_{N-1}^0}{\Delta X} - \Gamma \quad (34)$$

dont on tire successivement

$$S^{1/2} = S^0 + \left(\frac{dS}{d\tau}\right)^0 \frac{\Delta\tau}{2} \quad (35)$$

puis ensuite

$$\left(\frac{dS}{d\tau}\right)^{1/2} = \frac{1}{S^{1/2}} \frac{1 - U_{N-1}^0}{\Delta X} - \Gamma. \quad (36)$$

On détermine enfin la nouvelle épaisseur de la couche solide en posant

$$S = S^0 + \left(\frac{dS}{d\tau}\right)^{1/2} \Delta\tau. \quad (37)$$

Les calculs s'effectuent selon l'algorithme suivant à chaque nouvelle étape dans le temps. On calcule en premier lieu la valeur de la dérivée  $(dS/d\tau)^{1/2}$  à l'aide de (35), (36) avec les valeurs connues de  $U_i^0$ ,  $S^0$ , trouvées à l'étape précédente. On trouve alors le nouveau  $S$  avec (37). Il suffit ensuite, pour déterminer les nouvelles températures  $U_i$ , de porter ces quantités dans (36), ce qui donne un système tridiagonal à résoudre par l'algorithme de Thomas. Les nouveaux  $U_i$  et  $S$  servent ensuite à calculer les suivants à la prochaine étape dans le temps, et ainsi de suite.

Les calculs doivent commencer à un (faible) temps initial  $\tau = \tau^*$  où  $S = \delta$ . Pour une valeur donnée de  $\delta$ ,  $\tau^*$  et  $U$  sont évalués à partir de la solution de perturbation régulière à l'ordre zéro. Les résultats

numériques présentés ci-dessous ont été calculés en double précision pour un maillage régulier de 100 points, avec  $\delta = 10^{-5}$ . Le pas de calcul dans le temps était ajusté automatiquement de façon à ce que  $r_i$  ne varie pas plus de 2% d'une étape à l'autre. Le temps d'exécution est de l'ordre de deux minutes sur un micro ordinateur de la classe IBM/PC-AT.

## 5. RÉSULTATS

Dans ce qui suit, on compare les différentes solutions analytiques avec des prédictions numériques obtenues à partir d'un programme de différences finies. Ce programme, basé sur l'algorithme de solution décrit au paragraphe précédent, a été validé dans le cas plan, lorsque  $\Gamma = 0$  [14]. Il s'est montré capable de reproduire très fidèlement la solution de similarité exacte pour des nombres de Stefan beaucoup plus grands que le rayon de convergence de la solution de perturbation au second ordre. Pour les besoins de l'analyse des résultats à venir, on peut donc raisonnablement faire l'hypothèse que la solution numérique est fiable dans les autres cas aussi, à tout le moins pour de faibles valeurs d' $\varepsilon$ .

### 5.1. Temps de solidification

On doit d'abord estimer le domaine de validité des solutions analytiques, auquel on se référera comme au rayon de convergence, bien qu'on ne puisse pas parler au sens strict de rayon de convergence pour une série tronquée au second ordre. De manière générale, le rayon de convergence de l'une ou l'autre des 9 solutions données en appendice dépend de  $r_i$  et de  $\Gamma$ . Pour des valeurs données de ces deux paramètres, on peut évaluer le rayon de convergence en comparant le

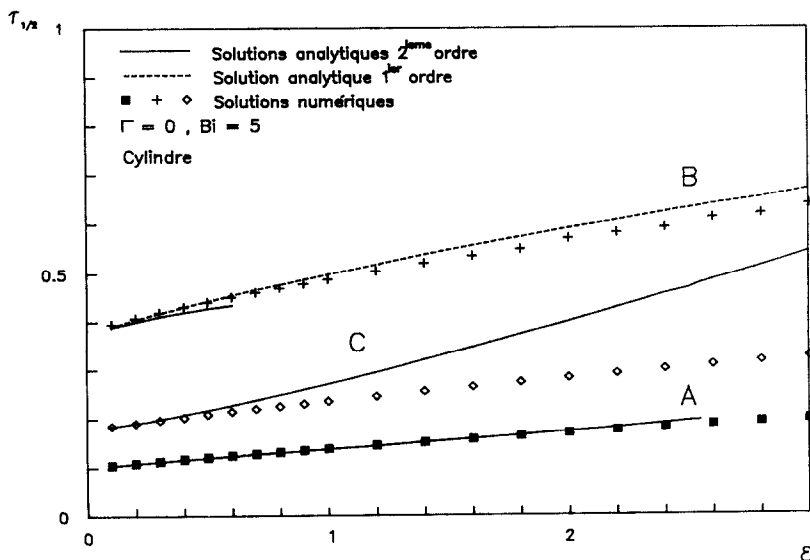
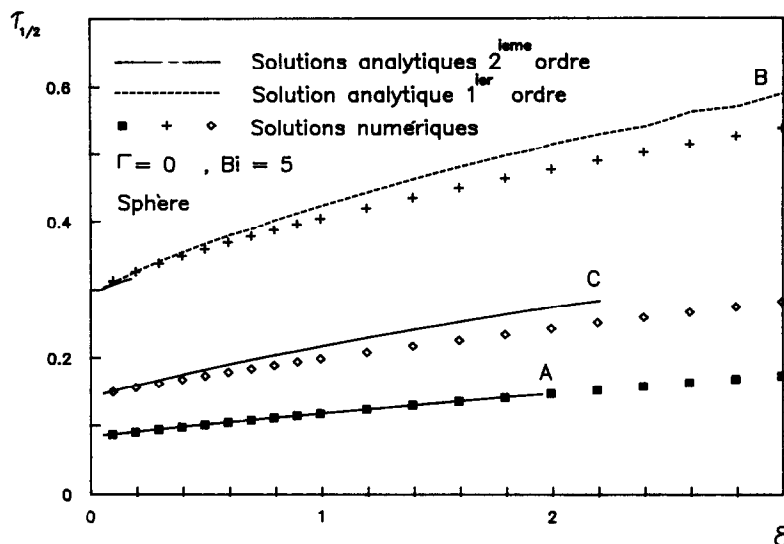


FIG. 2. Temps de solidification partiel, cylindre,  $\Gamma = 0$ ,  $Bi = 5$ .

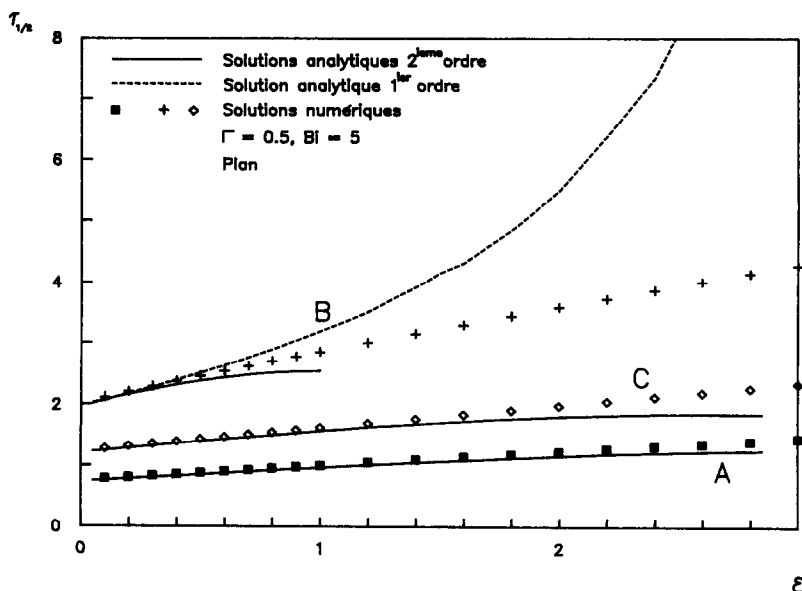
FIG. 3. Temps de solidification partiel, sphère,  $\Gamma = 0$ ,  $Bi = 5$ .

temps de solidification fourni par le calcul de perturbation avec celui de la solution numérique. Les Figs. 2 à 5 représentent le temps de solidification partiel correspondant à  $r_f = 1/2$ , noté  $\tau_{1/2}$ , en fonction du nombre de Stefan, pour les cas cylindrique et sphérique lorsque  $Bi = 5$  et  $\Gamma = 0$  ou  $0,5$ .

Sur ces figures, les courbes en traits pointillés correspondent aux solutions de perturbation à l'ordre un et les courbes en traits pleins aux solutions à l'ordre deux. Celles-ci se terminent parfois abruptement à un  $\varepsilon$  critique, au delà duquel il n'est plus possible d'établir, au moyen du développement (13), de correspondance entre la totalité de l'intervalle  $1/2 \leq r_f \leq 1$  et un intervalle quelconque  $\psi_{1/2} \leq \psi \leq 1$  tel que  $\psi_{1/2} > 0$ .

Cette condition est essentielle au succès de la méthode des coordonnées déformées, faute de quoi les solutions ne s'appliquent plus. Ceci est dû au fait que les termes  $\sigma_1(\psi, \psi)$  et  $\sigma_2(\psi, \psi)$  sont de signes contraires, et que  $\sigma_2$ , toujours positif, finit par prendre le pas sur  $\sigma_1$  à mesure qu'augmente  $\varepsilon$ , de sorte que pour un  $r_0$  donné, tel que  $0 \leq r_0 < 1$ , l'équation  $r_f(\psi) - r_0 = 0$  n'a plus de racine sur l'intervalle  $0 < \psi \leq 1$  quand  $\varepsilon$  dépasse un certain seuil critique.

L'accord entre les solutions numériques et analytiques est excellent pour les faibles valeurs d' $\varepsilon$  dans tous les cas. Si on accepte une marge d'erreur de, disons 5%, on peut déterminer les rayons de convergence données au Tableau 1 pour les solutions

FIG. 4. Temps de solidification partiel, plan,  $\Gamma = 0,5$ ,  $Bi = 5$ .

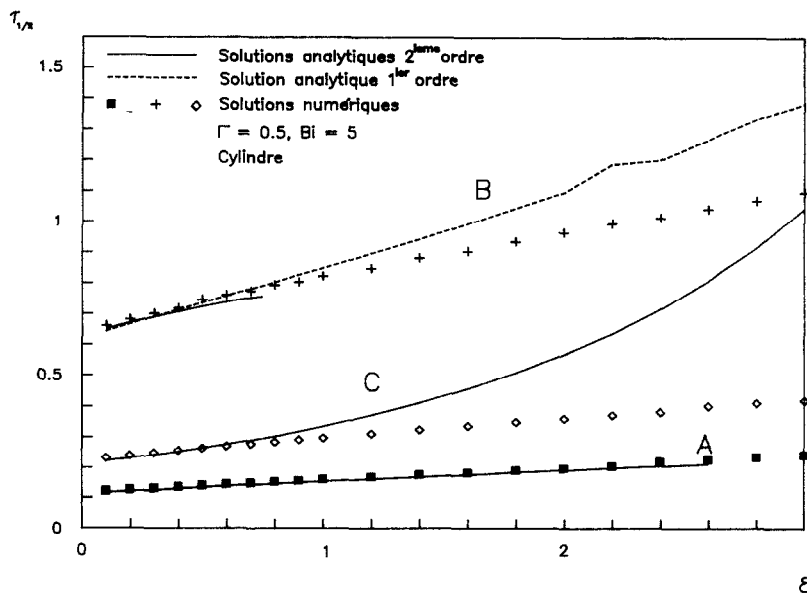


FIG. 5. Temps de solidification partiel, cylindre,  $\Gamma = 0,5$ ,  $Bi = 5$ .

analytiques dans les cas cylindrique et sphérique. Il s'agit des rayons des solutions au second ordre, sauf pour la condition (10b) où on donne les rayons pour les solutions à l'ordre un. Les seuils critiques des solutions à l'ordre deux sont résumés pour leur part au Tableau 2. Notons que le seuil critique est toujours beaucoup plus bas pour la condition (10b), en raison de l'importance relative du terme de second ordre dans la solution.

On constate que le rayon de convergence des solutions n'est pratiquement pas affecté par le paramètre  $\Gamma$ , sauf pour la condition (10b), où il y a une diminution importante dans chaque cas. Les seuils critiques sont légèrement haussés, sauf dans un cas, sous l'influence de  $\Gamma$ . Les Figs. 4 et 5 visent à mettre en évidence l'effet le plus marqué du paramètre  $\Gamma$ , qui est d'augmenter le temps de solidification, comme il se doit. L'influence de nombre de Biot, négligeable lorsque  $Bi$  est supérieur à  $\approx 10$  alors que les solutions pour les conditions (10a) et (10c) se confondent à toutes fins utiles, devient en revanche prépondérante à mesure que  $Bi$  tend vers des valeurs de l'ordre de l'unité. Le temps de solidification s'accroît alors rapidement tandis que le rayon de convergence diminue de façon abrupte.

La Fig. 6 montre, pour le cas plan cette fois, l'évolution du temps de solidification complète en

fonction d' $\epsilon$ , lorsque  $\Gamma = 0,5$  et  $Bi = 5$ . Les rayons de convergence correspondant aux conditions limites (10a)–(10c) sont respectivement de 2,2, 0,7 et 1,5. Ces valeurs sont en tous points comparables, à marge d'erreur égale, avec ce qu'on trouve pour un  $\Gamma$  nul [14]. Pour les seuils critiques, les valeurs sont égales, dans l'ordre, à 2,90, 1,05 et 2,90. Les Figs. 7 et 8 donnent les temps de solidification complète pour les cas cylindrique et sphérique lorsque  $Bi = 5$  et  $\Gamma = 0$ . Les rayons de convergence sont plus faibles que pour la solidification partielle. Les courbes en tirets correspondent cette fois aux solutions à l'ordre deux, et les courbes en traits pleins aux mêmes solutions après une transformation de Shank. La solution au second ordre pour la condition (10d) possède alors un seuil critique extrêmement faible ( $\approx 0,01$ ) et devient à toutes fins pratiques inutilisable. Les Figs. 7 et 8 permettent de juger de l'efficacité de la transformation de Shank [9] sur les solutions au second ordre. Pour la condition (10a), la transformation a pour effet de presque tripler le rayon de convergence dans les deux cas. Pour la condition (10b), la transformation n'est pas efficace, et pour la condition (10c), elle réussit à ralentir la divergence dans le cas sphérique. Le transformation de Shank règle cependant tous les problèmes de seuil critique.

Tableau 1. Rayons de convergence des solutions analytiques pour le temps de solidification partiel  $\tau_{1/2}$

	Cylindre		Sphère	
	$\Gamma = 0$	$\Gamma = 0,5$	$\Gamma = 0$	$\Gamma = 0,5$
(10a)	2,50	2,60	$> 2,0$	2,00
(10b)	2,40	1,10	1,20	0,80
(10c)	0,60	0,60	0,50	0,50

Tableau 2. Seuils critiques des solutions analytiques à l'ordre deux pour le temps de solidification partiel  $\tau_{1/2}$

	Cylindre		Sphère	
	$\Gamma = 0$	$\Gamma = 0,5$	$\Gamma = 0$	$\Gamma = 0,5$
(10a)	2,60	2,65	2,00	2,10
(10b)	0,61	0,75	0,18	0,18
(10c)	$> 3,0$	$> 3,0$	2,25	2,00



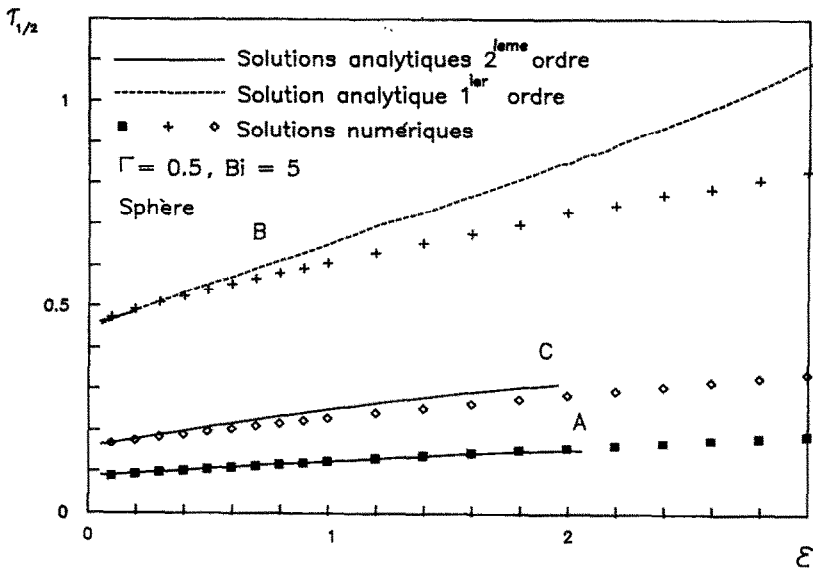


FIG. 6. Temps de solidification partiel, sphère,  $\Gamma = 0,5$ ,  $Bi = 5$ .

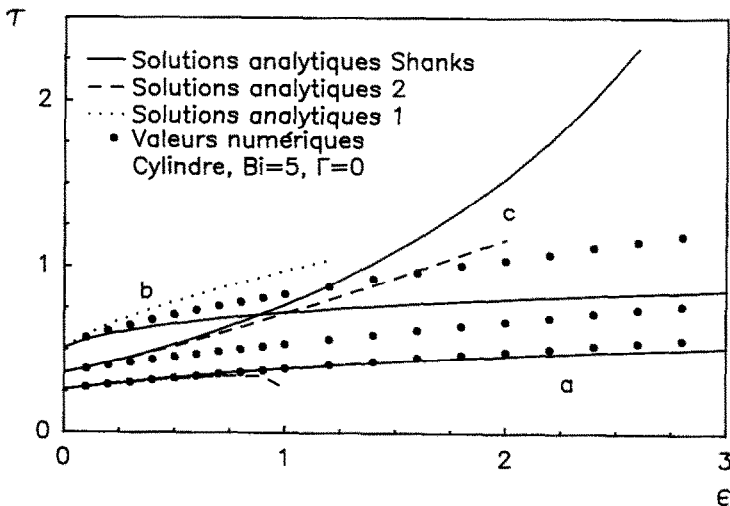


FIG. 7. Temps de solidification total, cylindre,  $\Gamma = 0$ ,  $Bi = 5$ .

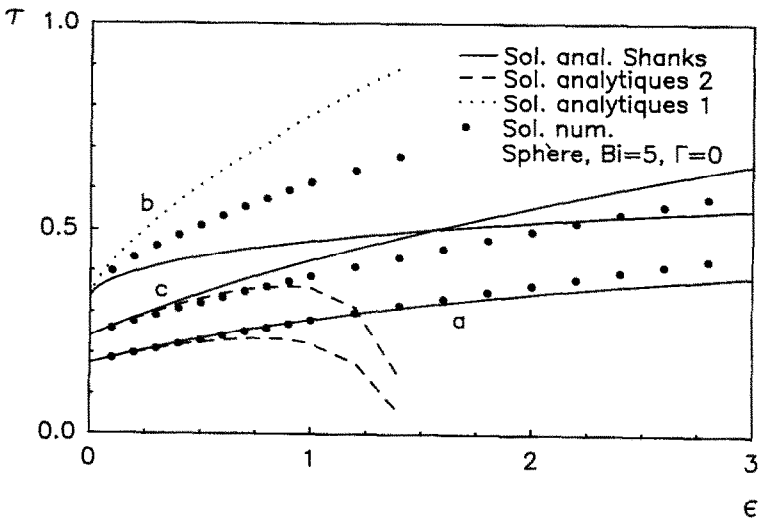
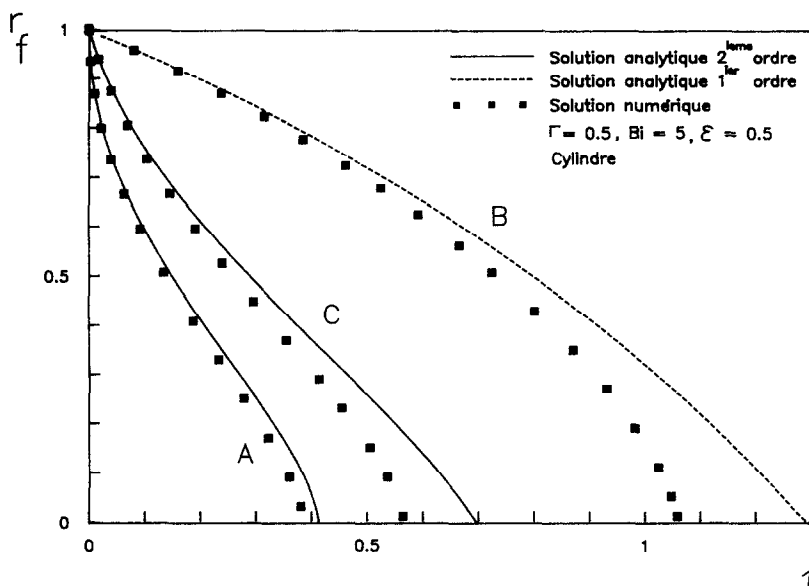


FIG. 8. Temps de solidification total, sphère,  $\Gamma = 0$ ,  $Bi = 5$ .

FIG. 9. Position de l'interface vs  $\tau$ , cylindre,  $\Gamma = \varepsilon = 0,5$ ,  $Bi = 5$ .

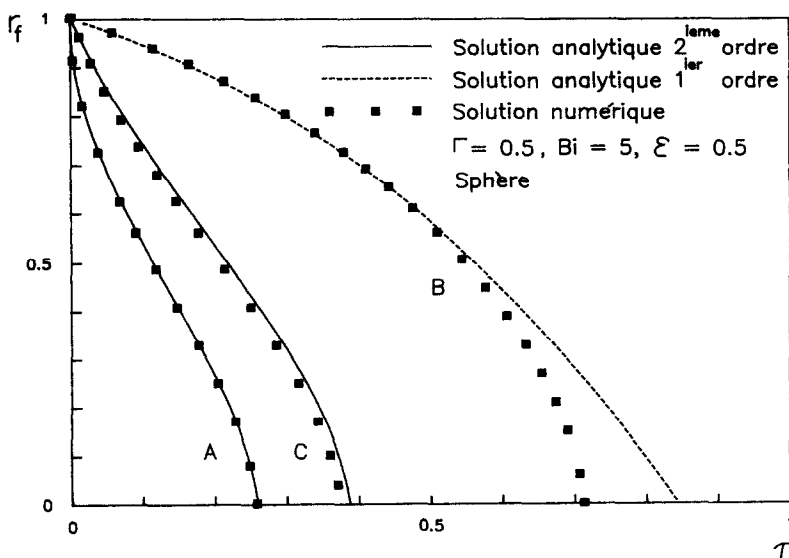
### 5.2. Profils de $r_f$ vs $\tau$

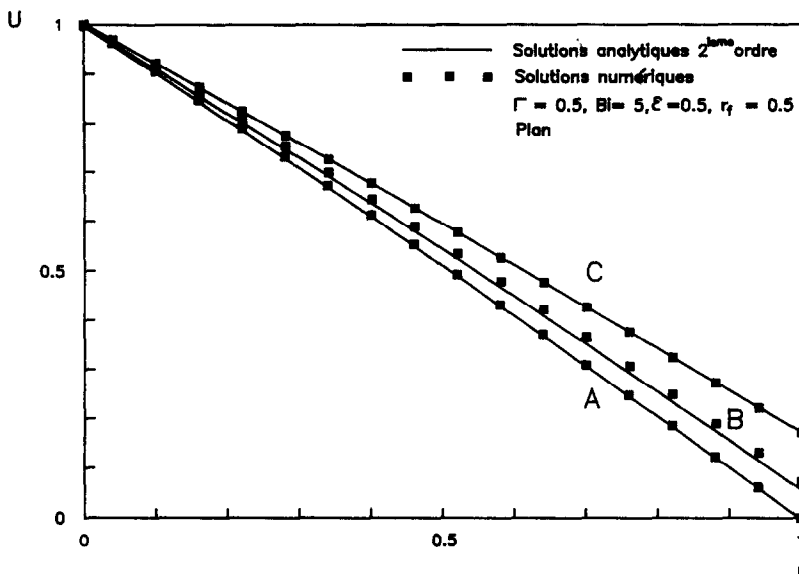
Les Figs. 9 et 10 illustrent la progression du front de solidification avec le temps pour les cas cylindrique et sphérique, lorsque  $\Gamma = \varepsilon = 0,5$  et  $Bi = 5$ . De façon qualitative, on peut dire que la solution pour la condition (10c) représente un cas intermédiaire entre les deux autres. Il est intéressant de constater que l'écart entre les deux types de solutions (numérique vs analytique) est déjà perceptible dans le cas cylindrique pour les conditions (10b) et (10c). On remarque le rythme auquel l'écart s'accroît à mesure que le front de solidification s'approche du centre. Ainsi l'écart passe de moins de 5% à  $r_f = 0,5$  à 20% lorsque  $r_f = 1$ . Dans le cas sphérique, l'accord est excellent pour les con-

ditions (10a) et (10c). Pour la condition (10b), l'écart devient perceptible à partir de  $r_f = 0,5$  et s'accroît rapidement par la suite, à mesure que  $r_f$  diminue. La Fig. 8 permet de constater que pour cette condition, la courbe représentée à la Fig. 10 correspond à un nombre de Stefan pour lequel la solution de perturbation diverge déjà.

### 5.3 Profils de $U$ vs $r$

Les Figs. 11–13 représentent les profils de température dans phase solide pour les trois géométries quand  $r_f = 0,5$ . Toutes les courbes sont tracées pour  $\Gamma = 0,5$  et  $\varepsilon = 0,5$ . Le nombre de Stefan choisi est inférieur au rayon de convergence de chacune des 9

FIG. 10. Position de l'interface vs  $\tau$ , sphère,  $\Gamma = \varepsilon = 0,5$ ,  $Bi = 5$ .

FIG. 11. Profil de température vs  $r$ , plan,  $r_f = 0,5$ ,  $\Gamma = \varepsilon = 0,5$ ,  $Bi = 5$ .

solutions. L'accord entre les prédictions numériques et les solutions de perturbation est excellent dans 8 cas sur 9. La solution dans le cas sphérique pour la condition (10b) fait exception. Toutefois l'accord entre les pentes des profils de  $U$  obtenus par les deux types de solution demeure satisfaisant, ce qui explique que les temps de solidifications, qui sont déterminés par la pente de  $U$  à  $r = r_f$ , concordent quand même pour cette valeur du nombre de Stefan.

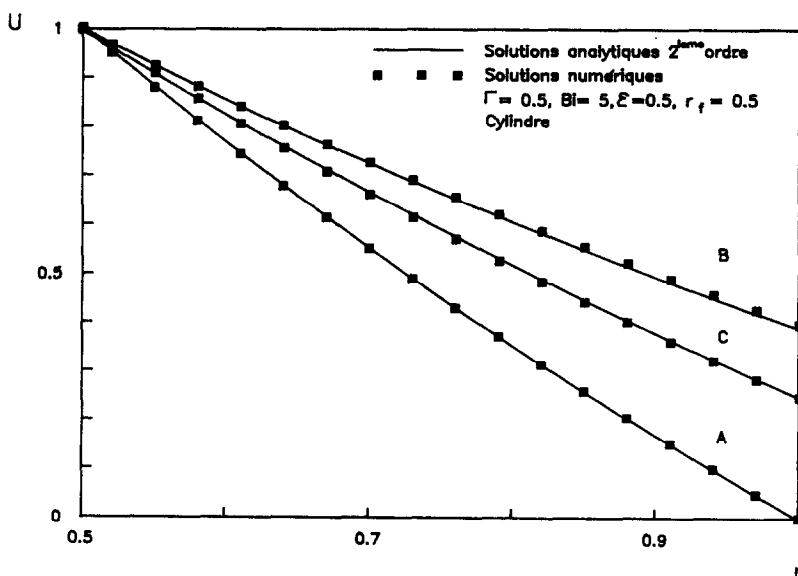
## 6. CONCLUSIONS

La méthode des coordonnées déformées a permis d'obtenir des résultats nouveaux dans les cas cylin-

drique et sphérique pour les conditions limites (10b) et (10c) qui viennent compléter les études précédentes en considérant d'autres géométries, d'autres conditions limites et le paramètre  $\Gamma$ .

La méthode s'avère sujette à caution dans le cas d'une condition de Neumann à  $R = R_w$ . Il semble dans ce cas qu'il vaille mieux se contenter d'une solution à l'ordre un. Notre conclusion abonde dans le sens de Van Dyke [13] qui recommandait d'utiliser cette méthode avec précaution pour les problèmes paraboliques.

Le paramètre  $\Gamma$  n'a qu'une influence mineure dans les limites de validité du modèle unidimensionnel. Le nombre de Biot, au contraire, joue un rôle très impor-

FIG. 12. Profil de température vs  $r$ , cylindre,  $r_f = 0,5$ ,  $\Gamma = \varepsilon = 0,5$ ,  $Bi = 5$ .

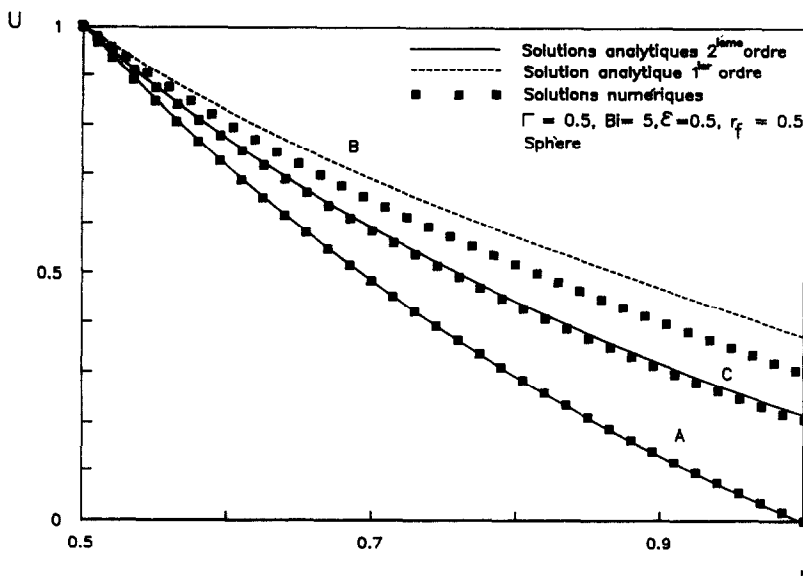


FIG. 13. Profil de température vs  $r$ , sphère,  $r_f = 0,5$ ,  $\Gamma = \varepsilon = 0,5$ ,  $Bi = 5$ .

tant lorsqu'il est de l'ordre de l'unité. La transformation de Shank permet d'augmenter le rayon de convergence des solutions au second ordre pour une condition de Dirichlet à  $R = R_w$ .

**Remerciements**—Nous désirons souligner l'aide précieuse que nous a apportée M. Louis Rivest pour l'exploitation du programme de différences finies et le tracage des graphiques. Ce travail a bénéficié d'une subvention de recherche du conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada CRSNG-A4982.

### RÉFÉRENCES

1. E. M. Sparrow and W. Chuck, An implicit-explicit numerical solution scheme for phase-change problems, *Numer. Heat Transfer* **7**, 1–15 (1984).
2. C. Bénard, D. Gobin and A. Zanolì, Moving boundary problem: heat conduction in the solid phase of a phase-change material during melting driven by natural convection in the liquid, *Int. J. Heat Mass Transfer* **29**, 1169–1181 (1986).
3. S. Toda, H. Sugiyama, H. Owada, M. Kurokawa and Y. Hori, Laminar flow heat transfer in a tube with internal solidification, *Proc. 8th Int. Heat Transfer Conf.*, Vol. 4, pp. 1745–1750 (1986).
4. H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*. Oxford University Press, Oxford (1959).
5. M. Prud'homme and T. H. Nguyen, A heat transfer analysis for solidification of slabs, cylinders and spheres, *J. Heat Transfer* (1989), sous presse.
6. R. I. Pedroso and G. A. Demoto, Perturbation solutions for spherical solidification of saturated liquids, *J. Heat Transfer* **95**, 42–46 (1973).
7. R. I. Pedroso and G. A. Demoto, Exact solution by perturbation method for planar solidification of a saturated liquid with convection at the wall, *Int. J. Heat Mass Transfer* **16**, 1816–1819 (1973).
8. D. S. Riley, Ph.D. Thesis, Hull University (1972).
9. R. I. Pedroso and G. A. Demoto, Inward spherical solidification—solution by the method of strained coordinates, *Int. J. Heat Mass Transfer* **16**, 1037–1043 (1983).
10. D. S. Riley, S. T. Smith and G. Poots, The inward solidification of spheres and circular cylinders, *Int. J. Heat Mass Transfer* **17**, 1507–1516 (1974).
11. P. M. Beckett, On the use of series solutions applied to solidification problems, *Mech. Res. Commun.* **8**(3), 169–174 (1981).
12. M. Van Dyke, Extended Stokes series: laminar flow through a loosely coiled pipe, *J. Fluid Mech.* **12**, 129–145 (1978).
13. M. Van Dyke, *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*. Parabolic Press, Stanford (1975).
14. M. Prud'homme, T. H. Nguyen et D. L. Nguyen, Analyse et simulation du processus de solidification d'un fluide initialement à la température de fusion, EPM/RT-87-14, Ecole Polytechnique de Montréal, Montréal, Québec, Canada (mars 1987).

### APPENDICE

Cas plan  
Ordre zéro

$$U(\psi, \phi) = 1 - \phi + \psi$$

pour la condition (10b) et

$$U(\psi, \phi) = \frac{\phi - \alpha}{\psi - \alpha}$$

pour la condition (10c) où  $\alpha = 1 + 1/Bi$ .

Ordre un

$$\begin{aligned}\sigma_1(\psi, \phi) &= (1 - \Gamma)\sigma_1^0 \\ \sigma_1^0 &= -\frac{(\phi - 1)^2}{2}\end{aligned}$$

pour la condition (10b) et

$$\begin{aligned}\sigma_1(\psi, \phi) &= [1 + \Gamma(\psi - \alpha)]\sigma_1^0 \\ \sigma_1^0 &= \frac{(\phi - 1)^2}{6(\psi - \alpha)^2}(\phi + 2 - 3\alpha)\end{aligned}$$

pour la condition (10c).

Ordre deux

$$\begin{aligned}\sigma_2(\psi, \phi) &= (1 - \Gamma)^2\sigma_2^0 - \Gamma(1 - \psi)\sigma_1 \\ \sigma_2^0 &= \frac{(\phi - 1)^3}{2} - (\phi - 1)^2(\psi - 1)\end{aligned}$$

pour la condition (10b) et

$$\begin{aligned}\sigma_2(\psi, \phi) &= [1 + \Gamma(\psi - \alpha)]^2\sigma_2^0 + \Gamma\frac{\psi - 1}{\psi - \alpha}\left[\frac{(\psi - 1)^2}{3(\psi - \alpha)} + 1 - \alpha\right]\sigma_1 + \Gamma(\phi - 1)^4\frac{1 + \Gamma(\psi - \alpha)}{24(\psi - \alpha)^3}\left[\frac{\phi - 1}{5} + 1 - \alpha\right] \\ \sigma_2^0 &= \frac{(\phi - 1)^3}{120(\psi - \alpha)^4}[7(\phi - 1)^2 + 35(1 - \alpha)(\phi - 1) + 60(1 - \alpha)^2] - \frac{(\phi - 1)^2(\psi - 1)}{9(\psi - \alpha)^5}[(\phi - 1) + 3(1 - \alpha)][(\psi - 1)^2 + 3(1 - \alpha)(\psi - \alpha)]\end{aligned}$$

pour la condition (10c).

*Cas cylindrique*

Ordre zéro

$$U(\psi, \phi) = 1 + \ln \psi - \ln \phi$$

pour (10b) et

$$U(\psi, \phi) = \frac{\ln \phi - \alpha}{\ln \psi - \alpha}$$

pour (10c) où  $\alpha = 1/Bi$ .

Ordre un

$$\begin{aligned}\sigma_1(\psi, \phi) &= (1 - \Gamma\psi)\sigma_1^0 \\ \sigma_1^0 &= \phi \frac{-\phi^2 + 2 \ln \phi + 1}{4\psi^2}\end{aligned}$$

pour la condition (10b) et

$$\begin{aligned}\sigma_1(\psi, \phi) &= [1 + \Gamma\psi(\ln \psi - \alpha)]\sigma_1^0 \\ \sigma_1^0 &= \phi \frac{(\phi^2 + 2\alpha + 1) \ln \phi + (1 + \alpha)(1 - \phi^2)}{4\psi^2(\ln \psi - \alpha)^2}\end{aligned}$$

pour la condition (10c).

Ordre deux

$$\begin{aligned}\sigma_2(\psi, \phi) &= (1 - \Gamma\psi)^2\sigma_2^0 - \frac{\Gamma}{2\psi}(1 - \psi)^2\sigma_1 - \frac{\Gamma}{\psi}(1 - \Gamma\psi)F_2(\psi, \phi) \\ \sigma_2^0 &= \frac{1 - 4\psi^2}{16\psi^4}\phi(-1 + \phi^2 - 2 \ln \phi) + \frac{\phi}{8\psi^4}(1 - 2\phi^2 + \phi^4 + \ln \phi - \phi^2 \ln \phi + \ln^2 \phi)\end{aligned}$$

pour la condition (10b) où

$$F_2(\psi, \phi) = \phi \frac{-5 + 4\phi^2 + \phi^4 - 4 \ln \phi - 8\phi^2 \ln \phi}{64\psi^2}.$$

D'autre part on trouve

$$\sigma_2(\psi, \phi) = [1 + \Gamma\psi(\ln \psi - \alpha)]^2 \sigma_2^0 + \Gamma \left[ \frac{2(\ln \psi - 1 - 2\alpha)\psi^2 \ln \psi - (1 + 2\alpha + 2\alpha^2)(1 - \psi^2)}{4\psi(\ln \psi - \alpha)^2} \right] \sigma_1 - \Gamma(\ln \psi - \alpha + 1) \frac{1 + \Gamma\psi(\ln \psi - \alpha)}{\psi(\ln \psi - \alpha)} F_2(\psi, \phi)$$

$$\begin{aligned} \sigma_2^0 = & \phi \sigma_1^0 \frac{-1 + \phi^2 - \ln \phi(1 + \phi^2) + \alpha(-1 + \phi^2 - 2 \ln \phi)}{4\psi^2(\ln \psi - \alpha)^2} \\ & + (\ln \psi + 1 - \alpha)\phi \frac{-3 + 3\phi^4 - 2 \ln \phi(1 + 4\phi^2 + \phi^4) + 2\alpha(-5 + 4\phi^2 + \phi^4 - 4 \ln \phi - 8\phi^2 \ln \phi)}{64\psi^4(\ln \psi - \alpha)^4} \\ & + [(3\psi^2 + 2\alpha + 1) \ln \psi - (2 + 3\alpha)\psi^2]\phi \frac{-1 + \phi^2 - \ln \phi(1 + \phi^2)}{16\psi^4(\ln \psi - \alpha)^4} \\ & + [(3\psi^2 + 2\alpha + 1) \ln \psi - (2 + 3\alpha)\psi^2]\alpha\phi \frac{-1 + \phi^2 - 2 \ln \phi}{16\psi^4(\ln \psi - \alpha)^4} \\ & + \phi \frac{-7 - 8\phi^2 + 15\phi^4 - 2 \ln \phi(1 + 4\phi^2 + 17\phi^4) + 4 \ln^2 \phi(1 + 6\phi^2 + 5\phi^4)}{128\psi^4(\ln \psi - \alpha)^4} \\ & + \alpha\phi \frac{31 - 48\phi^2 + 17\phi^4 + 4 \ln \phi(7 + 5\phi^2 - 5\phi^4) + 8 \ln^2 \phi(1 + \phi^2)}{64\psi^4(\ln \psi - \alpha)^4} \\ & + \alpha^2\phi \frac{-1 - 4\phi^2 + 5\phi^4 - 12\phi^2 \ln \phi + 4 \ln^2 \phi}{32\psi^4(\ln \psi - \alpha)^4} \end{aligned}$$

pour la condition (10c), où  $\sigma_1^0$  représente la dérivée de  $\sigma_1^0(\psi, \psi)$  qui vaut

$$\sigma_1^0 = \frac{(\psi^2 - 2\alpha - 1) \ln \psi + \alpha(1 - \psi^2)}{4\psi^2(\ln \psi - \alpha)^2} - \frac{(\psi^2 + 2\alpha + 1) \ln \psi + (1 + \alpha)(1 - \psi^2)}{2\psi^2(\ln \psi - \alpha)^3}$$

tandis que la fonction  $F_2$  est définie comme suit

$$F_2(\psi, \phi) = \phi \frac{-3 + 3\phi^4 - 2 \ln \phi(1 + 4\phi^2 + \phi^4)}{128\psi^2(\ln \psi - \alpha)^2} + \alpha\phi \frac{-5 + 4\phi^2 + \phi^4 - 4 \ln \phi(1 + 2\phi^2)}{64\psi^2(\ln \psi - \alpha)^2}.$$

### Cas sphérique

#### Ordre zéro

$$U(\psi, \phi) = 1 + \frac{1}{\phi} - \frac{1}{\psi}$$

pour la condition (10b) et

$$U(\psi, \phi) = \frac{1/\phi - \alpha}{1/\psi - \alpha}$$

pour la condition (10c) où  $\alpha = 1 - 1/Bi$ .

#### Ordre un

$$\sigma_1(\psi, \phi) = (1 - \Gamma\psi^2)\sigma_1^0$$

$$\sigma_1^0 = \phi \frac{-\phi^3 + 3\phi - 2}{6\psi^4}$$

pour la condition (10b) et

$$\begin{aligned} \sigma_1(\psi, \phi) = & [1 - \Gamma\psi(1 - \alpha\psi)]\sigma_1^0 \\ \sigma_1^0 = & \phi \frac{-(1 - \alpha\phi)^3 - 3\alpha\phi(1 - \alpha)^2 + (1 - \alpha)^2(1 + 2\alpha)}{6\psi^2\alpha^2(1 - \alpha\psi)^2} \end{aligned}$$

pour la condition (10c).

#### Ordre deux

$$\sigma_2(\psi, \phi) = (1 - \Gamma\psi^2)^2 \sigma_2^0 - \frac{\Gamma}{3\psi^2} (1 - \psi^3) \sigma_1 - \frac{2\Gamma}{\psi} (1 - \Gamma\psi^2) F_2(\psi, \phi)$$

où  $\sigma_2^0$  vaut

$$\begin{aligned} \sigma_2^0 = & \phi \frac{3\phi(\phi^5 - 4\phi^3 + 2\phi^2 + 3\phi - 2) + 4(\phi^3 - 3\phi + 2)(1 - \psi^3)}{36\psi^8} + \phi \frac{(-\phi^5 + 10\phi^3 - 20\phi^2 + 15\phi - 4)}{30\psi^7} \\ & F_2(\psi, \phi) = \phi \frac{\phi^5 - 10\phi^3 + 20\phi^2 - 15\phi + 4}{120\psi^4} \end{aligned}$$

pour la condition (10b) et

$$\sigma_2(\psi, \phi) = [1 - \Gamma\psi(1 - \alpha\psi)]^2 \sigma_2^0 - \Gamma \left[ \frac{(1 - \alpha\psi)^3 - (1 - \alpha)^3}{3\alpha(1 - \alpha\psi)^2} \right] \sigma_1 - \Gamma \frac{(1 - 2\alpha\psi)[1 - \Gamma\psi(1 - \alpha\psi)]}{\psi(1 - \alpha\psi)} F_2(\psi, \phi)$$

où  $\sigma_2^0$  vaut

$$\begin{aligned} \sigma_2^0 = & \phi \frac{(1 - \alpha\phi)^3 - (1 + 2\alpha - 3\alpha\phi)(1 - \alpha)^2}{9\psi^3\alpha^3(1 - \alpha\psi)^2} + \phi \frac{(1 - \alpha\phi)^5(-1 + 4\alpha\psi - 10\alpha\phi)}{120\psi^4\alpha^4(1 - \alpha\psi)^4} \\ & + \phi(1 - \alpha)^4 \frac{5\alpha\phi(1 + 4\alpha\psi - 12\alpha) + 1 + 4\alpha - 4\alpha(1 + 4\alpha)\psi + 50\alpha^2}{120\psi^4\alpha^4(1 - \alpha\psi)^4} \\ & + \phi(1 - \alpha)^2 \frac{[9(1 - \alpha)^2 - 18 - 30\alpha\psi - 24\alpha^2\psi](\phi^2 - 2\phi + 1)}{36\psi^4\alpha^2(1 - \alpha\psi)^4} \\ & + \phi(1 - \alpha)^2 \frac{(26\alpha + 4\alpha^2 + 18\alpha^2\psi)(\phi^3 - 3\phi + 2) - 12\alpha^2(\phi^4 - 4\phi + 3)}{36\psi^4\alpha^2(1 - \alpha\psi)^4} \\ & + \phi(1 - \alpha)^2 \frac{[(1 - \alpha\phi)^3 - (1 + 2\alpha - 3\alpha\phi)(1 - \alpha)^2][ - 1 - 2\alpha + 3\alpha\psi + 6\alpha^2\psi(1 - \psi)]}{36\psi^4\alpha^4(1 - \alpha\psi)^5} \\ F_2(\psi, \phi) = & \phi \frac{(1 - \alpha\phi)^5 + 10\alpha^2(1 - \alpha)^2[\alpha(\phi^3 - 2\phi^2 + \phi) + 2\phi - \phi^2 - 1]}{120\psi^3\alpha^4(1 - \alpha\psi)^2} + \phi \frac{(5\alpha\phi - 4\alpha - 1)(1 - \alpha)^4}{120\psi^3\alpha^4(1 - \alpha\psi)^2} \end{aligned}$$

pour la condition (10c).

## SINGULAR PERTURBATION SOLUTIONS FOR A GENERALIZED STEFAN PROBLEM

**Abstract**—Inward solidification of a liquid with constant thermal properties is studied here by both numerical and singular perturbation methods. The problem is solved for three types of boundary conditions in plane, cylindrical and spherical geometries. The liquid may be initially above the fusion temperature and natural convection effects are accounted for by a coefficient which is assumed to remain constant throughout the analysis. The method of strained coordinates is applied to obtain dimensionless solutions up to second order in the Stefan number, which is used here as a perturbation parameter. The range of validity of the solutions depends on the Biot number and the boundary conditions. The results obtained are in good agreement with numerical data for Stefan numbers up to 3.0 in one case for complete solidification after a Shank's transformation.

## LÖSUNG EINES GENERALISIERTEN STEFAN-PROBLEMS MIT HILFE VON EINZELSTÖRUNGSANSÄTZEN

**Zusammenfassung**—Sowohl mit numerischen Verfahren als auch mit Einzelstörungsansätzen wird der von außen nach innen fortschreitende Erstarrungsvorgang einer Flüssigkeit mit konstanten thermischen Stoffwerten untersucht. Dabei wird das Problem für drei verschiedene Typen von Randbedingungen und für ebene, zylindrische und kugelförmige Geometrien belöst. Die Temperatur der Flüssigkeit befindet sich zu Beginn oberhalb der Schmelztemperatur, der Einfluß der natürlichen Konvektion wird durch einen konstant gehaltenen Koeffizienten berücksichtigt. Um ein dimensionsloses Ergebnis der als Störungsparameter eingesetzten Stefan-Zahl (bis zur zweiten Ordnung) zu erhalten, wird eine Koordinatentransformation durchgeführt. Der Gültigkeitsbereich der Ergebnisse hängt von der Biot-Zahl und den Randbedingungen ab. Die Ergebnisse stimmen im Falle der Erstarrung nach einer "Shank"-Transformation mit den numerisch ermittelten Werten für Stefan-Zahlen bis 3,0 gut überein.

## РЕШЕНИЕ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА МЕТОДОМ СИНГУЛЯРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

**Аннотация**—Численным методом и методом сингулярных возмущений исследуется затвердевание жидкости с постоянными тепловыми свойствами. Задача решается для трех видов граничных условий в плоской, цилиндрической и сферической геометриях. Начальная температура жидкости может превосходить температуру плавления, и эффекты естественной конвекции учитываются коэффициентом, который предполагается постоянным. Метод деформированных координат применяется для получения безразмерных решений вплоть до второго порядка по числу Стефана, которое используется в качестве параметра возмущений. Область применимости решений зависит от числа Био и граничных условий. Полученные результаты хорошо согласуются с численными данными для числа Стефана вплоть до 3,0 в единственном случае полного затвердевания.